ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Нарманов Отабек Абдигаппарович
(Ташкентский университет информационных технологий, Узбекистан)
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru

Методы группового анализа широко используются для исследования уравнений в частных производных и для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений В работах [1], [2],[3], [4],[5],[6]. рассматривается вопросы интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений в частных производных, на основе известных инфинитезимальных симметрий. В работе [3] разработан вычислительный метод, явно определяющий полную группу симметрий произвольного дифференциального уравнения в частных производных. В работе [4] рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. В работе [2] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности использована в работе [6].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(u) \tag{1}$$

где $u = u(x_1, x_2, t) \geq 0$ — температурная функция, $k_i(u) \geq 0$, $Q(u)$ — функции от температуры u. Функция $Q(u)$ описывает процесс тепловыделения, если $Q(u) > 0$ и процесс теплопоглощения, если $Q(u) < 0$.

Исследования показывают, коэффициенты теплопроводности $k_1(u), k_2(u)$ в достаточно широком диапазоне изменения параметров может быть описан степенной функцией температуры, т. е. имеет вид $k(u) = u^\sigma$.

Рассмотрим случай $k_1(u) = k_2(u) = u^\sigma$, $Q(u) = u$. В этом случае уравнение (1.1) имеет следующий вид:

$$u_t = u^\sigma \Delta u + \sigma u^{\sigma-1}(\nabla u)^2 + u \tag{2}$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа,$\nabla u = \{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\}$ —градиент функции u.

Как показано в работе [2] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (1.2):

$$X_1 = \sigma x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \exp(-\sigma t)\frac{\partial}{\partial t} + \exp(-\sigma t)u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3}$$

Потоки векторных полей X_1, X_2 порождают следующие группы преобразований соответственно

$$(t, x_1, x_2, u) \to (t, x_1 e^s, x_2 e^s, u e^{2s}), s \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$(t, x_1, x_2, u) \to (\frac{1}{\sigma}\ln(e^{\sigma t} + \sigma s), x_1, x_2, u(e^{\sigma t} + \sigma s)^{\frac{1}{\sigma}}, s \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Мы найдем решения уравнения (1.2), инвариантные относительно групп преобразований (1.4), (1.5). Для этого сначала находим инвариантные функции этих преобразований.

Известно, что [3, с. 117] гладкая функция $f : M \to R$ является инвариантной функцией группы преобразований G, действующей на многообразии M тогда и только тогда, когда $Xf = 0$ для каждой инфинитезимальной образующей X группы G.

Используя этот критерий мы находим, что функции $I_1 = \frac{(x_1+x_2)\exp(\sigma t/2)}{\sqrt{u^\sigma}}$, $I_2 = \frac{x_1}{x_2}$ являются инвариантными фунциями группы преобразований (1.4),(1.5), что вытекает из следущих равенств $X_1(I_1) = 0$, $X_1(I_2) = 0$, $X_2(I_1) = 0$, $X_2(I_2) = 0$.

Теорема 1. *Решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4),(5) имеют вид*

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{\sigma}{2} e^t \frac{(x_1 + x_2)^{2/\sigma}}{2} V(\xi) \tag{6}$$

где $V(\xi)-$ общее решение дифференциальное уравнение второго порядка:

$$f(\xi)VV'' + f(\xi)V'^2 + 4\sigma(\xi+1)[\frac{\sigma}{2}(\xi^2+\xi) - 2\xi + 2]VV' + 4[2 + 2(\frac{2}{\sigma} - 1)]V^2 = 0, \tag{7}$$

где $f(\xi) = (\xi+1)^2(\xi^2+1)$, $g(\xi) = \sigma(\xi+1)[\frac{\sigma}{2}(\xi^2+\xi) - 2\xi + 2]$.

Теперь рассмотрим случай, когда есть поглощение тепла: $k_1(u) = k_2(u) = u^\sigma$, $Q(u) = -u$. В этом случае уравнение (1.1) имеет следующий вид:

$$u_t = u^\sigma \Delta u + \sigma u^{\sigma-1}(\nabla u)^2 - u \tag{8}$$

Как показано в работе [2] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (8):

$$X_1 = \sigma x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2u \frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \exp(\sigma t)\frac{\partial}{\partial t} + \exp(\sigma t) u \frac{\partial}{\partial u}. \tag{9}$$

Используя вышеприведенный критерий мы находим, что функции $I_1 = \frac{(x_1+x_2)\exp(-\sigma t/2)}{\sqrt{u^\sigma}}$, $I_2 = \frac{x_1}{x_2}$ являются инвариантными фунциями группы преобразований (1.5),(1.6), что вытекает из следущих равенств $X_1(I_1) = 0$, $X_1(I_2) = 0$, $X_2(I_1) = 0$, $X_2(I_2) = 0$.

Теорема 2. *Решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4),(5) имеют вид*

$$u(t, x_1, x_2) = \frac{\sigma}{2} e^{-t} \frac{(x_1 + x_2)^{2/\sigma}}{2} V(\xi) \tag{10}$$

где $V(\xi)$ общее решение дифференциальное уравнение второго порядка (7).

Выводы. В уравнении (2) есть источник тепловыделения, поэтому в каждой точке области переменных (x_1, x_2), отличных от точек $(0, 0)$, температурная функция (6) возрастает экспоненциально при возрастающем t. В уравнении (1.12) есть источник поглощения, в каждой точке области переменных (x_1, x_2), отличных от точек $(0, 0)$, температурная функция (10) убывает экспоненциально при возрастающем t.

Литература

[1] Ли С., Шефферс. Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. Москва - Ижевск: Научно-издательский центр: "Регулярная и хаотическая динамика". 2011. 704 с.

[2] Дородницын В.А.,Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. Дифференцальые уравнения, 1983, том 19, номер 7,С. 1215–1223. http://mi.mathnet.ru/de4904

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.М.: Мир, 1989. 639 с.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978. 398 с.

[5] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва, Наука, 1987, 481стр.

[6] Narmanov O.A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2018,6, С.373–381. DOI: 10.4236/jamp.2018.62035